mélet szerint *elvileg* végezhető ilyen mérés, meglepő következményeivel fogunk találkozni később e fejezetben.

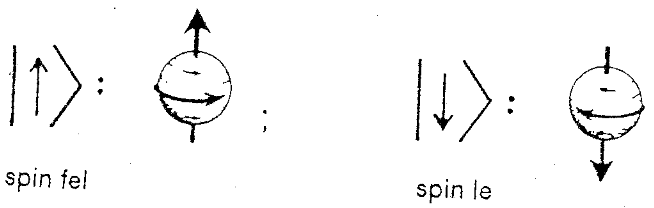
A spin és az állapotok Riemann-gömbje

A kvantummechanikában „*spin*”-nek nevezett mennyiséget olykor minden fizikai mennyiség közül a leginkább „kvantummechanikainak” nevezik, ezért bölcs dolog lesz, ha komoly figyelmet fordítunk reá. Mi a spin? Lényegében egy részecske forgásának mértéke. Maga a „spin” kifejezés a labda pörgéséhez hasonló valamit sugall. Emlékezzünk vissza az *impulzusmomentumra*, amely az energiához és impulzushoz hasonlóan *megmaradó* mennyiség (lásd 5. fejezet 190. o., valamint 257. o.). Egy test impulzusmomentuma mindaddig megmarad, amíg a súrlódási vagy más erő meg nem zavarja. Valójában ilyen a kvantummechanikai spin is, de most bennünket *egyetlen* részecske „pörgése” érdekel, és nem az egyedi részecskék miriádjainak közös tömegközéppontjuk körüli keringő mozgása (ez a labda pörgése). Figyelemre méltó fizikai tény, hogy a természetben található legtöbb részecske ténylegesen „pörög” ebben az értelemben, mindegyik a saját nagyon specifikus mértéke szerint.[8] Látni fogjuk azonban, hogy egy kvantummechanikai részecske spinjének nagyon sajátos tulajdonságai vannak, amelyeket a pörgő labdákkal és hasonló dolgokkal szerzett tapasztalataink alapján egyáltalán nem várnánk.

Elsősorban egy részecske spinjének *nagysága* mindig *ugyanaz*, az adott típusú részecskére jellemző állandó. Csak a spin tengelyének iránya változhat (elég furcsa módon, mint látni fogjuk). Ez éles ellentétben áll a labda esetével, amely tetszőleges mértékben pöröghet, s a perdület nagysága attól függ, hogyan pörgetjük meg! Elektron, proton vagy neutron esetében a spin nagysága mindig $\hbar/2$, azaz *fele* a legkisebb pozitív értéknek, amelyet Bohr az atomok kvantált impulzusmomentumára eredetileg megengedett. (Emlékeztetőül: ezek az értékek 0, $\hbar$, $2\hbar$, $3\hbar$, ...voltak.) Most a $\hbar$ alapegység felét írjuk elő — bizonyos értelemben a $\hbar/2$ a még alapvetőbb egység. Ilyen nagyságú impulzusmomentum nem volna megengedett egy olyan keringő részecskékből álló objektum esetében, amelyek önmagukban nem pörögnek; csak azért jöhet létre, mert a spin magának a részecskének *belső* tulajdonsága (azaz nem „részeinek” egy középpont körüli keringő mozgásából származik).

Azokat a részecskéket, amelyek spinje $\hbar/2$ *páratlan* számú többszöröse (tehát $\hbar/2$, $3\hbar/2$, $5\hbar/2$ stb.), *fermionoknak* nevezzük, ezek kvantummechanikai leírásában van egy furcsaság: a teljes, 360°-os forgatás az állapotvektort nem önmagába, hanem önmaga *mínusz egyszeresébe* viszi át! A Természet sok részecskéje fermion, ezekről, furcsaságaikról — amelyek létezésünk szempontjából annyira életbevágóak — később többet fogunk megtudni. A többi részecskét, amelyek spinje $\hbar/2$ *páros* számú, azaz $\hbar$ egész számú többszöröse (nevezetesen $\hbar$, $2\hbar$, $3\hbar, \ldots$), *bozonoknak* nevezzük. Egy bozon állapotvektorát a 360°-os forgatás *önmagába*, nem pedig a negatívjába viszi át.

Tekintsünk egy *feles spinű*, tehát $\hbar/2$ spinértékű részecskét. A határozottság kedvéért úgy fogok róla beszélni, mint *elektronról*, de ugyanúgy lehetne proton vagy neutron, sőt megfelelő fajta atom is. (Egy „részecskének" lehetnek egyedi alkotórészei mindaddig, amíg kvantummechanikailag jól meghatározott teljes impulzusmomentummal rendelkező, egyetlen egészként kezelhető.) Az elektront nyugalomban lévőnek vesszük, és csak spinállapotát vizsgáljuk. A kvantummechanikai állapottér (Hilbert-tér) most *két*dimenziós, ezért *két* állapotból álló bázist kell választanunk. Ezek jelölésére most a $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ szimbólumokat használom: $|\uparrow\rangle$ azt jelzi, hogy a spin a *felfelé* mutató függőleges irányhoz, $|\downarrow\rangle$ azt, hogy a *lefelé* mutatóhoz képest jobbkezes (*6.24. ábra*). A $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ állapotok egymásra ortogonálisak, és mindkettőt normáltnak vesszük ($|\uparrow|^2 = |\downarrow|^2 = 1$). Az elektron bármely lehetséges spinállapota a *két* ortonormált állapot, $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$, azaz a *fel* és *le* lineáris szuperpozíciója.



6.24. ábra. Az elektron spinállapotainak egy bázisa csupán két állapotból áll. Ezek lehetnek a *spin fel* és *spin le* állapotok

Na már most, a „fel" és „le" irányokban nincsen semmi speciális. Ugyanúgy választhattunk volna tetszőleges más irányt a spin leírására (amelyhez képest jobbkezes), mondjuk a *jobb* $|\rightarrow\rangle$ és *bal* $|\leftarrow\rangle$ állapotokat. Ekkor (alkalmas komplex szorzótényezőkkel)*

$$|\rightarrow\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \qquad |\leftarrow\rangle = |\uparrow\rangle - |\rightarrow\rangle.$$

Ez új képet nyújt számunkra: az elektron spinjének bármelyik állapota két ortogonális állapot, $|\rightarrow\rangle$ és $|\leftarrow\rangle$, azaz *jobb* és *bal* lineáris szuperpozíciója. Választhatunk egy teljesen tetszőleges irányt, mondjuk a $|\nearrow\rangle$ állapotvektorral megadottat. Ez megint komplex lineáris kombinációja a $|\uparrow\rangle$ és $|\downarrow\rangle$ állapotoknak,

$$|\nearrow\rangle = w|\uparrow\rangle + z|\downarrow\rangle,$$

* Mint korábban, most sem akarom a leírást $1/\sqrt{2}$ szorzókkal telezsúfolni, amelyek fellépnének, ha megkövetelnénk, hogy $|\rightarrow\rangle$ és $|\leftarrow\rangle$ normáltak legyenek.

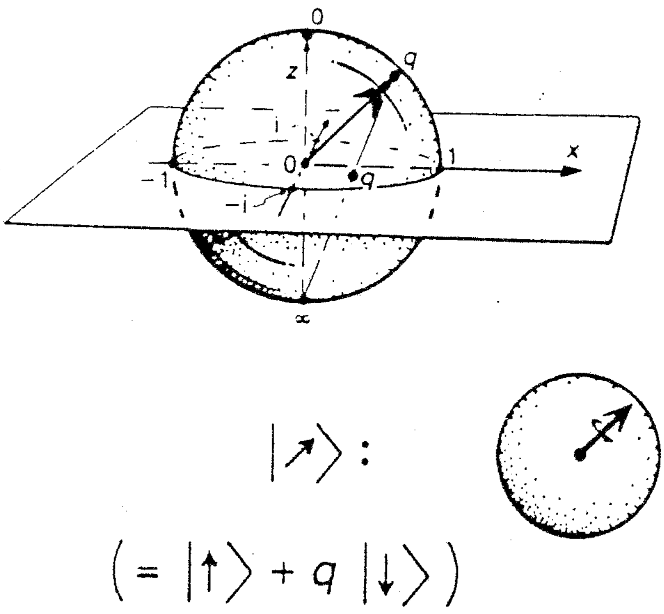
és minden spinállapot lineáris szuperpozíciója ennek és a $|\swarrow\rangle$ ortogonális állapotnak, amelyik $|\nearrow\rangle$-val ellentétes irányba mutat.[9] (Jegyezzük meg, hogy az „ortogonális" fogalom a Hilbert-térben nem jelent „derékszögűt" a közönséges térben. A Hilbert-tér ortogonális vektorai most a tér ellentétes irányainak felelnek meg, és nem derékszöget bezáróknak.)

Mi a geometriai kapcsolat a $|\nearrow\rangle$ által meghatározott térbeli irány és a két komplex szám, w és z között? Mivel a $|\nearrow\rangle$ fizikai állapotot egy nem zérus komplex számmal való szorzás nem befolyásolja, ezért csak z és w *arányának* van jelentése. Legyen ez az arány

$$q = z/w.$$

q is valamilyen komplex szám, most a „$q = \infty$" értéket is megengedjük, hogy megbirkózhassunk a $w = 0$ esettel is, tehát azzal, amikor a spin iránya függőlegesen lefelé mutat. Ha $q \neq \infty$, akkor q-t az Argand-sík egy pontjaként ábrázolhatjuk, ahogy azt a 2. fejezetben tettük. Képzeljük ezt az Argand-síkot a térben vízszintesnek, a valós tengely mutasson „jobbra" (azaz a $|\rightarrow\rangle$ spinállapot irányába). Képzeljünk el egy egységsugarú gömböt, amelynek középpontja az Argand-sík kezdőpontjában van; ekkor az 1, i, -1, $-$i pontok mind a gömb egyenlítőjére esnek. A déli sarkpontot jelöljük ∞-nel, és vetítsünk ebből a pontból úgy, hogy a teljes Argand-sík leképeződjék a gömbre. Így a sík minden q pontjának egyértelműen megfelel a gömb egy q pontja, amelyet úgy kapunk, hogy a két pontot összekötjük a déli sarkponttal (*6.25. ábra*). A megfeleltetés neve *sztereografikus* vetítés, és sok szép geometriai tulajdonsága van (megőrzi például a szögeket, kört körbe visz át). A vetítés módot ad arra, hogy a gömb pontjait komplex számokkal és a ∞-nel felcímkézzük, ezek lesznek a lehetséges q komplex arányok. Az ilyen speciális módon megjelölt gömböt *Riemann-gömbnek* nevezzük. A Riemann-gömb jelentősége az elektron spinállapotaira nézve az, hogy a $|\nearrow\rangle = w|\uparrow\rangle + z|\downarrow\rangle$ kombinációval megadott spin irányát megkaphatjuk, ha a középpontból a Riemann-gömb $q = z/w$ jelzésű pontjába nyilat rajzolunk. Megjegyezzük, hogy az északi pólus a $|\uparrow\rangle$ állapotnak felel meg, amelyre $z = 0$, azaz $q = 0$, a déli pólus pedig a $|\downarrow\rangle$ állapotnak, amelyre $w = 0$, azaz $q = \infty$. A jobb szélső a $q = 1$ pont, amely a $|\rightarrow\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$ állapotot, a bal szélső a $q = -1$ pont, amely a $|\leftarrow\rangle = |\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle$ állapotot adja. A gömb hátsó részén a legtávolabbi a $q = \mathrm{i}$ pont, amely a $|\uparrow\rangle + \mathrm{i}|\downarrow\rangle$ állapotnak felel meg, ebben a spin a lapba befelé mutat, a hozzánk legközelebbi a $q = -\mathrm{i}$ pont, amely a $|\uparrow\rangle - \mathrm{i}|\downarrow\rangle$ állapotnak felel meg, ebben a spin egyenesen felénk mutat. A q-val jelölt pont általánosan a $|\uparrow\rangle + q|\downarrow\rangle$ állapotnak felel meg.

Hogyan kapcsolódik mindez az elektron spinjén elvégezhető mérésekhez?[10] Válasszunk ki egy irányt a térben; jelöljük ezt α-val. Ha megmérjük az elektron spinjét ebben az irányban, akkor az **IGEN** válasz azt mondja, hogy az elektron



6.25. ábra. A Riemann-gömb itt az 1/2-spinű részecske fizikailag különböző spinállapotainak terét jeleníti meg. A gömböt déli pólusából (∞) sztereografikusan vetítjük az egyenlítőjén átmenő Argand-síkra

(most) valóban az α irányban pörög (jobbkezesen), míg a **NEM** válasz azt, hogy az α-val ellentétes irányban.

Tegyük fel, hogy a válasz **IGEN**; jelöljük ezt az állapotot $|\alpha\rangle$-val. Ha pontosan ugyanabban az α irányban egyszerűen megismételjük a mérést, akkor a válasznak újra **IGEN**-nek kell lennie 100% valószínűséggel. De ha a második mérésre az irányt egy új β irányra változtatjuk, akkor azt találjuk, hogy az **IGEN** válasz valószínűsége valamivel kisebb, ekkor az állapot $|\beta\rangle$-ba ugrik, és van esély arra, hogy a második mérésre adott válasz **NEM** lesz, amikor az állapot a β-val ellentétes irányúba ugrik be. Hogyan számítsuk ki ezt a valószínűséget? A választ az előző szakasz végén adott előírások tartalmazzák. Az **IGEN** valószínűsége a második mérésnél

$$\frac{1}{2}(1 + \cos\theta),$$

ahol θ az α és β irányok által bezárt szög.[11] A **NEM** valószínűsége a második mérésnél

$$\frac{1}{2}(1 - \cos\theta).$$

Látjuk ebből, hogy ha a második mérést az elsővel derékszöget bezáró irányban végezzük, akkor mindkét valószínűség 50% ($\cos 90^\circ = 0$): a második mérés eredménye teljesen véletlenszerű! Ha a két mérés iránya hegyesszöget zár be, akkor az **IGEN** válasz valószínűbb, mint a **NEM**. Ha tompaszöget, akkor a **NEM** valószínűbb, mint az **IGEN**. Abban a szélsőséges esetben, amikor β ellentétes α-val, az **IGEN** valószínűsége 0-vá, a **NEM**-é 100%-ká válik; azaz a második mérés eredménye biztosan az első megfordítottja. (A spinről többet lásd Feynman és mások 1965.)

A Riemann-gömb alapvető (de nem mindig felismert) szerepet játszik *tetszőleges* kétállapotú kvantumrendszernél, leírja (arányossági tényező erejéig) a lehetséges kvantumállapotok elrendeződését. Geometriai szerepe különösen nyilvánvaló a feles spinű részecskénél, mert a gömb pontjai a spintengely lehetséges térbeli irányainak felelnek meg. Sok más helyzetben nehezebb látni a Riemann-gömb szerepét. Tekintsünk egy fotont, amely éppen átjutott egy réspáron, vagy visszaverődött egy félig ezüstözött tükörről. A foton állapota két állapot, a két egészen elkülönülő helyzetet leíró $|\psi_f\rangle$ és $|\psi_a\rangle$ valamilyen lineáris kombinációja, például $|\psi_f\rangle+|\psi_a\rangle$, $|\psi_f\rangle-|\psi_a\rangle$ vagy $|\psi_f\rangle+i|\psi_a\rangle$. A Riemann-gömb leírja a fizikailag különböző lehetőségek elrendezését, de most csak *absztrakt* módon. A $|\psi_f\rangle$ állapotot az északi („felső"), a $|\psi_a\rangle$-t a déli („alsó") pólus ábrázolja. A $|\psi_f\rangle + |\psi_a\rangle$, $|\psi_f\rangle - |\psi_a\rangle$ és $|\psi_f\rangle + i|\psi_a\rangle$ állapotokat az egyenlítő különböző pontjai ábrázolják, és általánosan a $w|\psi_f\rangle + z|\psi_a\rangle$ állapotot a $q = z/w$-vel adott pont. Sok esetben, mint ebben is, a lehetőségek „Riemann-gömb értékei" meglehetősen rejtettek, nincs világos kapcsolatuk a térbeli geometriával.

A kvantumállapotok objektivitása és mérhetősége

Annak ellenére, hogy egy kísérlet eredményére általában csak valószínűségeink vannak, egy kvantummechanikai állapotban látszik valami *objektív* tartalom. Gyakran állítják, hogy az állapotvektor csupán kényelmes leírása egy fizikai rendszerre vonatkozó „tudásunknak" — vagy esetleg hogy az állapotvektor valójában nem ír le egyetlen rendszert, csak valószínűségi információt nyújt egy nagyszámú, hasonlóan elkészített rendszerből álló „sokaságról". Ezek a vélemények szerintem ésszerűtlenül félénkek azzal kapcsolatban, amit a kvantummechanikának mondania kell nekünk a fizikai világ „valóságosságáról".

Az állapotvektorok „fizikai valóságára" vonatkozó óvatosság vagy kételkedés egy része láthatóan abból a tényből származik, hogy az elmélet szigorúan korlátozza, mi mérhető fizikailag. Tekintsük az elektron egy spinállapotát, ahogy az előbb leírtuk. Tegyük fel, hogy a spinállapot éppen $|\alpha\rangle$, de mi ezt nem tudjuk; nem ismerjük az α *irányt*, amely körül az elektron a feltevés szerint pörög. Meg tudjuk-e határozni méréssel? Nem, nem tudjuk. A legtöbb, amit tehetünk, hogy szerzünk „egy bit" információt — azaz választ egyetlen színűségi amplitúdó" fogalma. (A közönséges vektoralgebrában a skaláris szorzat $ab\cos\theta$, ahol a és b a vektorok hossza, θ az irányaik által bezárt szög.) A Hilbert-tér vektorainak skaláris szorzata *komplex* számot ad. Két állapotvektor skaláris szorzatát úgy írjuk, hogy $\langle\psi|\chi\rangle$. Vannak algebrai szabályok, mint

$$\langle\psi|(|\chi\rangle + |\varphi\rangle) = \langle\psi|\chi\rangle + \langle\psi|\varphi\rangle, \quad \langle\psi|(q|\chi\rangle) = q\langle\psi|\chi\rangle, \quad \text{és} \quad \langle\psi|\chi\rangle = \overline{\langle\chi|\psi\rangle},$$

ahol a felülvonás komplex konjugálást jelent. ($z = x + iy$ komplex konjugáltja $\bar{z} = x - iy$, x és y valósak; jegyezzük meg, hogy $|z|^2 = z\bar{z}$). $|\psi\rangle$ és $|\chi\rangle$ ortogonalitását $\langle\psi|\chi\rangle = 0$ fejezi ki. $|\psi\rangle$ négyzetes hossza, $|\psi|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$, ezért $|\psi\rangle$ akkor egységvektor, ha $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Ha egy „mérési esemény" a $|\psi\rangle$ állapotot vagy $|\chi\rangle$-be, vagy $|\chi\rangle$-re ortogonális állapotba ugrasztja, akkor a $|\chi\rangle$-be való ugrás amplitúdója $\langle\chi|\psi\rangle$, feltéve, hogy mindkettő normált. Normálás nélkül a $|\chi\rangle$-be való ugrás valószínűsége a $\langle\chi|\psi\rangle\langle\psi|\chi\rangle/\langle\chi|\chi\rangle\langle\psi|\psi\rangle$ alakban írható (lásd Dirac 1947).

7. A kvantummechanika operátorformalizmusában jártasak számára megjegyzem, hogy ezt a mérést (Dirac jelölésében) a korlátos, hermitikus $|\chi\rangle\langle\chi|$ operátor definiálja. Az 1 sajátérték (normált $|\chi\rangle$ mellett) **IGEN**-t, a 0 sajátérték **NEM**-et jelent. (A $\langle\chi|$, $\langle\psi|$ stb. vektorok az eredeti Hilbert-tér *duálisához* tartoznak.) Lásd Neumann (1955), Dirac (1947).
8. Az egy részecskét tartalmazó kvantumrendszerről adott korábbi leírásom egyszerűsített volt, mert elhagytam a spint, feltételeztem, hogy az állapot leírható egyedül a helyzet függvényeként. Ténylegesen *vannak* olyan részecskék — *skalár* részecskéknek hívják ezeket, példa rájuk a *pionoknak* (π-mezonoknak, vö. 244. o.) nevezett magrészecskék vagy bizonyos atomok —, amelyek spinje zérus. Ezekre a részecskékre (de csak ezekre) a korábbi leírás megfelelő.
9. $|\swarrow\rangle = \bar{z}|\uparrow\rangle - \bar{w}|\downarrow\rangle$, ahol $\bar{z}$ és $\bar{w}$ z és w komplex konjugáltjai. (Lásd a 6. jegyzetet.)
10. Van egy szabványos kísérleti eszköz, a Stern–Gerlach-berendezés, amely használható az atomok spinjének mérésére. Az atomokat egy nyalábban gyűjtik össze, amely áthalad egy erősen inhomogén mágneses mezőn, a mező inhomogenitásának iránya szolgáltatja a spinmérés irányát. A nyaláb (feles spinű atomnál) két részre hasad (magasabb spinű esetén kettőnél több részre), az egyikben azok az atomok vannak, amelyek a spinmérésre **IGEN**-nel, a másikban azok, amelyek **NEM**-mel válaszoltak. Technikai okok miatt, amelyek a mi szempontjainkból lényegtelenek, ez a berendezés az elektron spinjének mérésére sajnos nem használható, arra közvetettebb eljárást kell alkalmazni (lásd Mott és Massey 1965). Ezért és egyéb okok miatt jobbnak látom nem részletezni, hogyan mérik a valóságban az elektron spinjét.
11. A vállalkozó szellemű Olvasó ellenőrizheti a szövegben megadott geometriát. Ez akkor a legkönnyebb, ha úgy állítjuk be Riemann-gömbünket, hogy az α-irány mutat „felfelé", a β-irány a „fel" és „jobbra" által kifeszített síkban fekszik, azaz $q = \mathrm{tg}(\theta/2)$-vel adott a Riemann-gömbön, és ekkor a $\langle\chi|\psi\rangle\langle\psi|\chi\rangle/\langle\chi|\chi\rangle\langle\psi|\psi\rangle$ előírást használjuk a $|\psi\rangle$-ből $|\chi\rangle$-be való ugrás valószínűségére. Lásd 6. jegyzet.
12. Matematikai nyelven azt mondjuk, hogy a kétrészecske-állapotok tere az első és a második részecske állapotai terének *tenzorszorzata*. A $|\chi\rangle|\varphi\rangle$ állapot ekkor a $|\chi\rangle$ és $|\varphi\rangle$ állapotok tenzorszorzata.